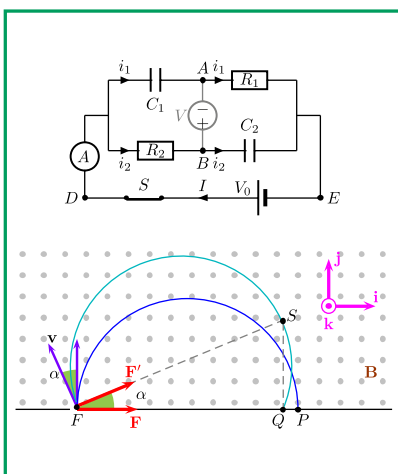


Problemi di Fisica

Correnti in conduttori
Moto di cariche in campi e.m.
Campo magnetico e correnti
Induzione elettromagnetica

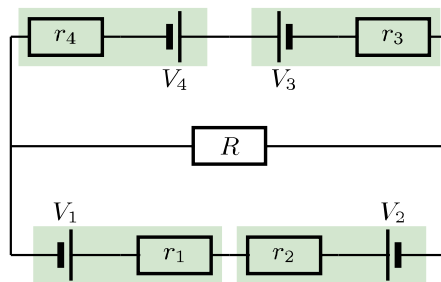


Vol. 2/3

LORENZO ROI

Problema 1.5

Nel circuito di **figura** sono coinvolte quattro batterie con relative resistenze interne ed un resistore R . Determinare a) la differenza di potenziale del resistore e b) le d.d.p. ai capi di ciascuna batteria. I dati sono: $V_1 = V_3 = 10\text{V}$, $V_2 = 20\text{V}$, $V_4 = 15\text{V}$, $r_1 = r_3 = 2\Omega$, $r_2 = 3\Omega$, $r_4 = 0,5\Omega$, $R = 30\Omega$.



Soluzione. Indicati con A , B , C e D i terminali dei quattro generatori (fig. 1), definite le correnti entranti ed uscenti dal nodo A e il verso di percorrenza nelle due maglie scelte, il primo principio di Kirchhoff si traduce nella relazione

$$i_3 - i_1 - i_2 = 0 \quad (1)$$

mentre il secondo principio permette di scrivere le ulteriori due relazioni

$$\begin{cases} V_1 - r_1 i_1 - r_2 i_1 - V_2 - R i_3 = 0 \\ -r_4 i_2 + V_4 - V_3 - r_3 i_2 - R i_3 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

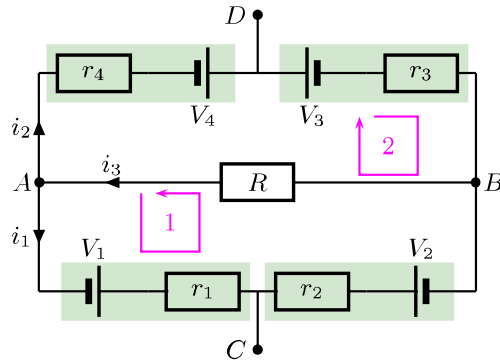


Fig. 1. Indicazioni di nodi, maglie e correnti.

Le (1) e (2) permettono di impostare il sistema lineare

$$\begin{cases} i_3 - i_1 - i_2 = 0 \\ V_1 - r_1 i_1 - r_2 i_1 - V_2 - R i_3 = 0 \\ -r_4 i_2 + V_4 - V_3 - r_3 i_2 - R i_3 = 0 \end{cases}$$

avente come incognite le tre correnti. Riordinato

$$\begin{cases} i_1 & i_2 & -i_3 = & 0 \\ -(r_1 + r_2)i_1 & 0 & -R i_3 = & V_2 - V_1 \\ 0 & i_1 & -(r_3 + r_4)i_2 & -R i_3 = V_3 - V_4 \end{cases} \quad (3)$$

e per semplicità, espresso in termini numerici con la sostituzione dei valori numerici delle resistenze e dei potenziali

$$\begin{cases} i_1 & i_2 & -i_3 = & 0 \\ -5i_1 & 0 & -30i_3 = & 10 \\ 0 & i_1 & -2,5i_2 & -30i_3 = -5, \end{cases} \quad (4)$$

il calcolo dei determinanti fornisce

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 0 & -30 \\ 0 & -2,5 & -30 \end{vmatrix} = -\frac{175}{2} - 150 = -\frac{475}{2}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 10 & 0 & -30 \\ -5 & -2,5 & -30 \end{vmatrix} = 475$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -5 & 10 & -30 \\ 0 & -5 & -30 \end{vmatrix} = -300 - 150 - 25 = -475$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 10 \\ 0 & -2,5 & -5 \end{vmatrix} = -25 + 25 = 0$$

per cui le soluzioni sono

$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{475}{(-475/2)} = -2 \text{ A},$$

$$i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-475}{(-475/2)} = 2 \text{ A},$$

$$i_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{(-475/2)} = 0.$$

a) Osserviamo quindi che il resistore R non viene attraversato da alcuna corrente per cui i potenziali dei nodi A e B sono uguali ossia $V_A = V_B$ e la corrente circola nell'unica maglia concordemente al verso di i_2 .

b) Le d.d.p. ai capi delle quattro batterie sono pertanto:

$$V_A - V_D = -r_4 i_2 + V_4 = -(0,5 \Omega)(2 \text{ A}) + 15 \text{ V} = 14 \text{ V},$$

$$V_D - V_B = -V_3 - r_3 i_2 = -10 \text{ V} - (2 \Omega)(2 \text{ A}) = -14 \text{ V}$$

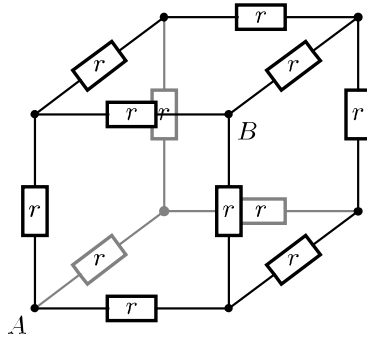
come d'altra parte aspettato visto che $V_A = V_B$. Allo stesso modo

$$V_B - V_C = V_2 - r_2 i_2 = 20 \text{ V} - (3 \Omega)(2 \text{ A}) = 14 \text{ V},$$

$$V_C - V_A = -r_1 i_2 - V_1 = -(2 \Omega)(2 \text{ A}) - 10 \text{ V} = -14 \text{ V}.$$

Problema 1.13

Dodici resistori ciascuno di resistenza r sono connessi a forma di cubo come mostrato in figura. Determinare la resistenza equivalente rilevata tra A e B , vertici opposti della diagonale di una faccia del cubo.



Soluzione. Come nei precedenti due problemi immaginiamo di collegare ai vertici A e B del cubo un generatore di tensione tale che sia $V_A > V_B$. Siano inoltre $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$ i potenziali dei corrispondenti vertici (fig. 1) e i_1, i_2 e i_3 le correnti uscenti dal vertice A .

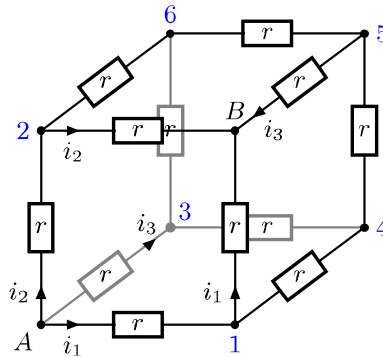


Fig. 1. Correnti sui conduttori associati ai vertici A e B .

Per la simmetria della disposizione le correnti i_1 dello spigolo $A-1$ e i_2 relativa allo spigolo $A-2$ sono uguali per cui $i_1 = i_2$. La legge di Ohm implica quindi

$$V_A - V_1 = ri_1, \quad V_A - V_2 = ri_2, \quad i_1 = i_2 \quad \implies \quad V_1 = V_2. \quad (1)$$

I resistori di tali spigoli sono quindi in parallelo così come, di conseguenza, i resistori degli spigoli $B-1$ e $B-2$. Le stesse correnti divergenti dal vertice A sono, per la simmetria già evidenziata, convergenti in B (fig. 1). Ne segue che nel vertice 2 la corrente i_{26} dello spigolo $2-6$ dev'essere nulla per la prima legge di Kirchhoff

$$i_2 - i_{26} - i_2 = 0 \quad \implies \quad i_{26} = 0.$$

Un'analogia osservazione vale per il vertice 1 per cui lo spigolo 1-4 non è percorso da corrente cioè $i_{14} = 0$.

I resistori degli spigoli 2-6 e 1-4 non sono quindi percorsi da corrente cosicché ai loro capi la d.d.p. è nulla e quindi valgono le relazioni tra i potenziali

$$V_1 = V_2 = V_4 = V_6$$

e il cubo lo si può riportare alla rete di figura 2 costituita ora da solo 10 resistori e dove si sono aggiunti dei collegamenti fittizi per connettere i punti allo stesso potenziale (si veda, per una alternativa, la nota finale).

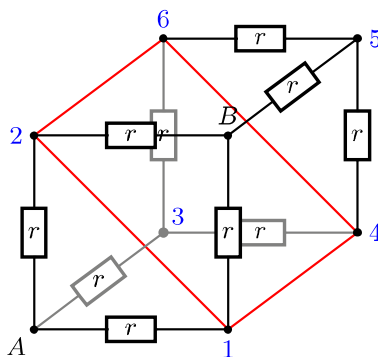


Fig. 2. Collegamenti e punti equipotenziali.

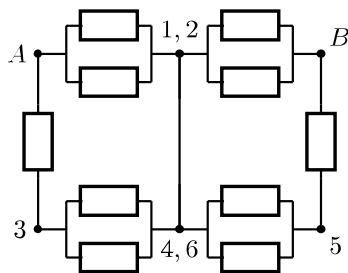


Fig. 3. Circuito equivalente al cubo.

Quest'ultima configurazione, a sua volta, si mostra equivalente al circuito "bidimensionale" di figura 3 e attraverso il quale si riconoscono più facilmente i collegamenti in serie e in parallelo. Poiché

$$\text{parallelo}[r, r] = \frac{r \cdot r}{r + r} = \frac{r}{2},$$

il circuito di figura 3 si riduce dapprima a quello di fig. 4a (passo 1) e successivamente a quello equivalente di fig. 4b. I passi successivi sono rappresentati dalla figura 5.

Tradotto questo processo in una successione di formule risulta:

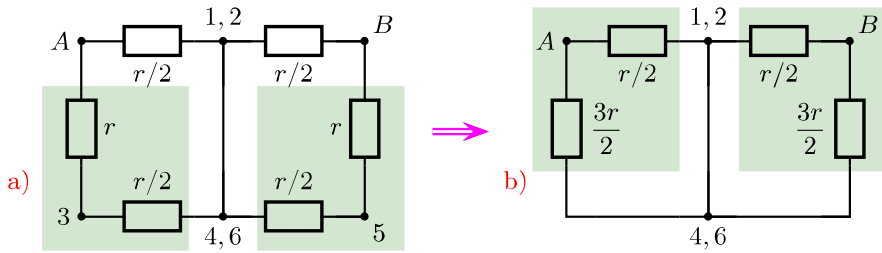


Fig. 4. Circuiti equivalenti: passi 1 e 2.

$$\text{passo 2: } r_2 = r + \frac{r}{2} = \frac{3r}{2}$$

$$\text{passo 3: } \frac{1}{r_3} = \frac{1}{3r/2} + \frac{1}{r/2} = \frac{8}{3r} \implies r_3 = \frac{3r}{8}$$

$$\text{passo 4: } r_{eq} = \frac{3r}{8} + \frac{3r}{8} = \frac{3r}{4}$$

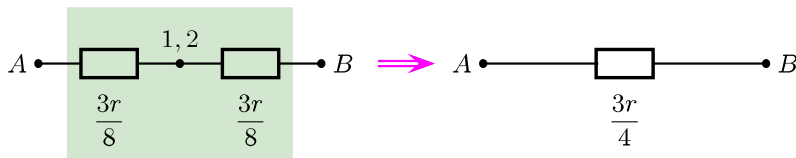


Fig. 5. Circuiti equivalenti e passo finale.

per cui la resistenza complessiva del cubo è $r_{eq} = 3r/4$.

Nota. Poiché gli spigoli 1–4 e 2–6 non sono percorsi da corrente (oltreché essere equipotenziali), i resistori presenti si possono sostituire con degli interruttori aperti come in figura 6.

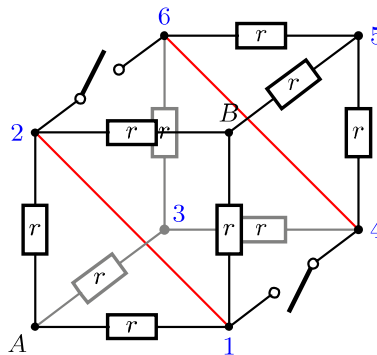


Fig. 6. Punti equipotenziali e interruzioni.

Ne segue che la rete piana di resistori di figura 3 va modificata in quella di figura 7 e questa, dopo una riduzione dei quattro collegamenti in parallelo (passo 1) diviene equivalente al circuito di figura 8a.

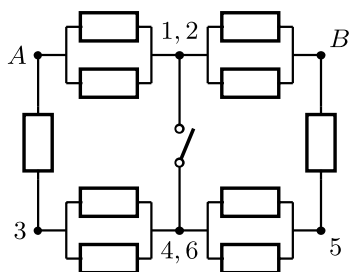


Fig. 7. Circuito equivalente al cubo di figura 6.

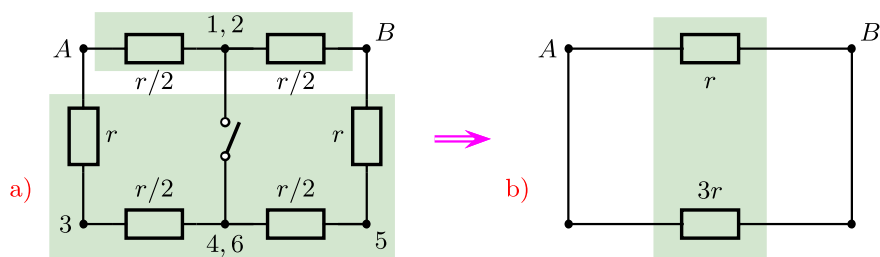


Fig. 8. Circuiti equivalenti alla rete di figura 7.

Successivamente, riconosciuti due gruppi di resistenze in ciascuno dei quali i resistori sono in serie (fig. 8a), un'ulteriore riduzione permette di semplificare il circuito in quello di fig. 8b e quindi, con un passo finale, ottenere la resistenza equivalente: in formule

$$\begin{aligned}
 \text{passo 2:} \quad r_2 &= r + \frac{r}{2} + \frac{r}{2} + r = 3r, & r_{2bis} &= \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \\
 \text{passo 3:} \quad \frac{1}{r_{eq}} &= \frac{1}{3r} + \frac{1}{r} = \frac{4}{3r} \implies r_{eq} = \frac{3r}{4}.
 \end{aligned}$$

Problema 2.7

Un campo magnetico uniforme di 0,2 T possiede direzione concorde all'asse x di un sistema cartesiano $Oxyz$. Un fascio di protoni ($m = 1,67 \times 10^{-27}$ kg) entra nella regione con una velocità di 9×10^5 m/s e forma un angolo di 75° con il campo. Determinare il raggio della traiettoria e il suo passo.

Soluzione. Definita la simbologia

$$\begin{aligned} q &= 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}, & m &= 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}, & v_0 &= 9 \times 10^5 \text{ m/s}, \\ \alpha &= 75^\circ, & B &= 0,2 \text{ T}, \end{aligned}$$

il campo \mathbf{B} si può rappresentare vettorialmente come $\mathbf{B} = B \mathbf{i}$ dove \mathbf{i} assieme a \mathbf{j} e \mathbf{k} , appartiene alla terna di versori che definisce il sistema cartesiano. Ne segue che il vettore velocità, nell'istante in cui il fascio entra nel campo magnetico (che supponiamo nell'origine), è espresso da

$$\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \alpha) \mathbf{i} + (v_0 \sin \alpha) \mathbf{j} = v_{\parallel} \mathbf{i} + v_{\perp} \mathbf{j} \quad (1)$$

con v_{\parallel} e v_{\perp} componenti della velocità iniziale rispettivamente parallela e perpendicolare al campo \mathbf{B} (fig. 1). La forza di Lorentz agente sul fascio di protoni è

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) = q(v_0 \cos \alpha \mathbf{i} + v_0 \sin \alpha \mathbf{j}) \times (B \mathbf{i}) \\ &= qv_0 B \cos \alpha (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + qv_0 B \sin \alpha (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) = qv_0 B \sin \alpha (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) \end{aligned}$$

in quanto $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$. Poiché in una terna destrorsa vale l'uguaglianza vettoriale $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, per la proprietà anticommutativa del prodotto vettoriale la forza diviene

$$\mathbf{F} = -(qv_0 B \sin \alpha) \mathbf{k} = -(qv_{\perp} B) \mathbf{k} \quad (2)$$

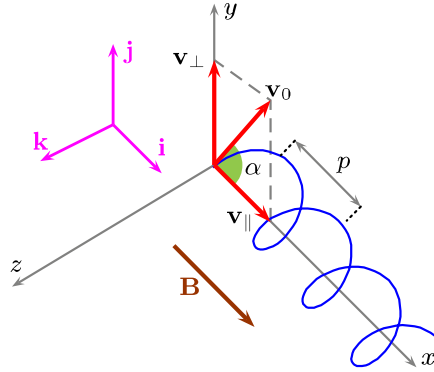
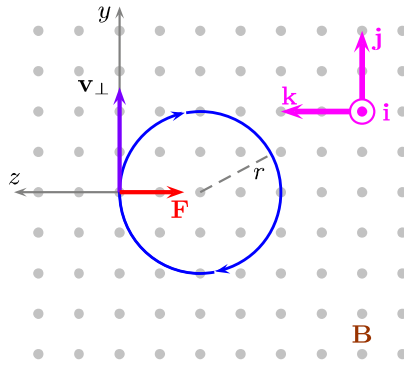


Fig. 1. Situazione iniziale e traiettoria.

Fig. 2. Rappresentazione del moto sul piano zy .

per cui inizialmente è parallela all'asse z ma di verso opposto. Come aspettato, questa è dovuta alla sola componente perpendicolare v_{\perp} al campo della velocità e agisce in un piano ortogonale alla direzione di \mathbf{B} mentre la sua componente è nulla nella direzione dell'asse x (fig. 2).

Il moto che ne deriva è la composizione di un moto circolare uniforme con un moto rettilineo uniforme, quest'ultimo dovuto invece alla componente della velocità v_{\parallel} , parallela a \mathbf{B} : la traiettoria è pertanto costituita da un'elica (fig. 1).

Il raggio della traiettoria si deduce proiettando la seconda legge della dinamica sul piano zy (fig. 2) che lega l'accelerazione centripeta $(v_{\perp})^2/r$ con il modulo della forza (2)

$$qv_{\perp}B = \frac{m(v_{\perp})^2}{r} \quad \Longrightarrow \quad qv_0B \sin \alpha = \frac{m(v_0 \sin \alpha)^2}{r}$$

da cui

$$r = \frac{mv_0 \sin \alpha}{qB} = 4,54 \text{ cm.} \quad (3)$$

Il periodo di rotazione di tale moto si deduce sfruttando la relazione cinematica $v_{\perp} = 2\pi r/T$ che per (3) scriviamo

$$v_0 \sin \alpha = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{mv_0 \sin \alpha}{qB} \right) \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{2\pi m}{qB} = 3,28 \times 10^{-7} \text{ s.}$$

Poiché in tale intervallo di tempo il protone avanza con la velocità costante $v_{\parallel} = v_0 \cos \alpha$ e di un tratto pari al passo p , questa grandezza risulta

$$p = v_{\parallel} \cdot T = (v_0 \cos \alpha)T = 7,64 \text{ cm.}$$

Problema 2.11

Una regione di spazio è sede di un campo elettrico $\mathbf{E} = -E\mathbf{j}$ con $E = 10^5 \text{ V/m}$ e di un campo magnetico $\mathbf{B} = B\mathbf{j}$ con $B = 0,15 \text{ T}$. Un protone ($m = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$) viene immesso nella regione con velocità $v_0 = 8 \times 10^6 \text{ m/s}$ formante un angolo $\alpha = 30^\circ$ con l'asse y . a) Calcolare il raggio r dell'elica e la distanza percorsa lungo y dal protone nel primo giro. b) Calcolare inoltre la distanza percorsa prima che il protone inverta il suo moto lungo l'asse y .

Soluzione. a) Rappresentiamo nella figura 1 la situazione iniziale del protone ($q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$) ponendolo in tale istante nell'origine O di un sistema definito dai vettori \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} .

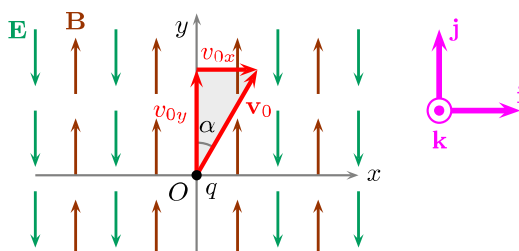


Fig. 1. Campi elettrico e magnetico e velocità iniziale del protone.

Espressa la velocità iniziale \mathbf{v}_0 tramite le componenti

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = (v_0 \sin \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \cos \alpha)\mathbf{j}, \quad (1)$$

il protone nel suo moto nella regione sede dei due campi risente sia della forza di Lorentz $q(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B})$ che della forza $q\mathbf{E}$ dovuta al campo elettrico. La seconda legge della dinamica implica quindi

$$q(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) + q\mathbf{E} = m\mathbf{a}$$

mentre in termini di componenti diviene

$$q[(v_0 \sin \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \cos \alpha)\mathbf{j}] \times (B\mathbf{j}) + q(-E\mathbf{j}) = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}),$$

relazione vettoriale che si riduce nella

$$(qv_0B \sin \alpha)\mathbf{k} - (qE)\mathbf{j} = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \quad (2)$$

non appena si applichi la proprietà distributiva e si osservi che $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ e $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$. La forza agente sul protone in O possiede pertanto solo le componenti $F_y = -qE$ e $F_z = qv_0B \sin \alpha$ e se dividiamo la (2) per la massa m

$$-\left(\frac{qE}{m}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{qv_0B \sin \alpha}{m}\right)\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},$$

riconosciamo le componenti iniziali dell'accelerazione

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{qE}{m} \\ a_z = \frac{qBv_0 \sin \alpha}{m}. \end{cases} \quad (3)$$

a) Con riferimento alla figura 2 dove sono riportati i vettori iniziali della velocità $\mathbf{v}_{0x} = (v_0 \sin \alpha)\mathbf{i}$ e della forza \mathbf{F}_z , osserviamo che la perpendicolarità $\mathbf{v}_{0x} \perp \mathbf{F}_z$ viene rispettata anche negli istanti successivi per cui il moto nel piano xz è un moto circolare uniforme con accelerazione centripeta a_z rappresentata dalla (4) e velocità in modulo costante uguale a $v_{0x} = v_0 \sin \alpha$. In questo piano la relazione tra modulo della velocità e accelerazione centripeta è quindi

$$\frac{(v_{0x})^2}{r} = a_z \quad \Longrightarrow \quad \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{r} = \frac{qBv_0 \sin \alpha}{m}$$

dalla quale ricaviamo il raggio della proiezione su xz della traiettoria

$$r = \frac{mv_0 \sin \alpha}{qB} \quad (5)$$

e quindi, con i dati iniziali, il suo valore numerico $r = 0,278$ m.

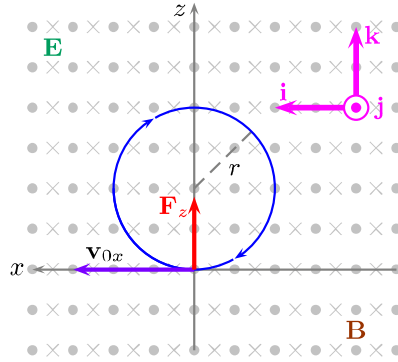


Fig. 2. Rappresentazione del moto sul piano xz .

Posto nella precedente $v_0 \sin \alpha = \omega r = 2\pi r/T$ ne discende pure il periodo T

$$r = \frac{m}{qB} \cdot \frac{2\pi r}{T} \implies T = \frac{2\pi m}{qB} = 4,37 \times 10^{-7} \text{ s.} \quad (6)$$

Se sull'asse x il moto è evidentemente armonico in quanto proiezione di un moto circolare (e analogamente su z), lungo l'asse y agisce l'accelerazione costante data dalla (3) per cui il moto su questo asse è uniformemente accelerato. Poiché la velocità iniziale è $v_{0y} = v_0 \cos \alpha$ le equazioni di questo moto in funzione del tempo sono

$$\begin{cases} a_y = -\frac{qE}{m}, \\ v_y = -\left(\frac{qE}{m}\right)t + v_{0y} = -\left(\frac{qE}{m}\right)t + v_0 \cos \alpha \end{cases} \quad (7)$$

$$y = -\frac{1}{2}\left(\frac{qE}{m}\right)t^2 + (v_0 \cos \alpha)t = -\left(\frac{qE}{2m}\right)t^2 + (v_0 \cos \alpha)t \quad (8)$$

La sostituzione di $t = T$ nella (8) fornisce la distanza y_1 percorsa in un periodo T

$$y_1 = -\left(\frac{qE}{2m}\right)T^2 + (v_0 \cos \alpha)T = 2,11 \text{ m}$$

mentre, b) per determinare la massima distanza percorsa y_2 prima di invertire il moto va dedotto l'istante dell'inversione della velocità caratterizzato dalla $v_y = 0$. Posta questa condizione nella (7) troviamo

$$0 = -\left(\frac{qE}{m}\right)t + v_0 \cos \alpha \implies t_2 = \frac{mv_0 \cos \alpha}{qE} = 7,23 \times 10^{-7} \text{ s} \quad (9)$$

per cui la distanza cercata è

$$y_2 = -\left(\frac{qE}{2m}\right)t_2^2 + (v_0 \cos \alpha)t_2.$$

Sostituendo l'espressione simbolica (9) diviene

$$y_2 = -\frac{qE}{2m} \left(\frac{mv_0 \cos \alpha}{qE} \right)^2 + \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{qE}$$

e, dopo alcune semplificazioni, si riduce alla

$$y_2 = \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2qE} = 2,51 \text{ m.}$$

Nota. Quale approfondimento di questo problema traduciamo la traiettoria del moto armonico nel piano xz riportata in figura 2 nelle corrispondenti equazioni rappresentative così da associarle all'equazione (8) che già descrive il moto lungo y . Con il raggio r dato dalla (5), la pulsazione $\omega = 2\pi/T$ e il periodo ottenuto in (6), queste sono

$$x = -r \text{sen}(\omega t), \quad z = r[1 - \text{cos}(\omega t)]$$

cosicché le equazioni complete della traiettoria sono

$$\begin{cases} x = -r \text{sen}(\omega t) \\ y = -\left(\frac{qE}{2m}\right)t^2 + (v_0 \cos \alpha)t \\ z = r[1 - \text{cos}(\omega t)]. \end{cases}$$

Nelle due figure seguenti rappresentiamo da due punti di vista distinti la traiettoria del protone assieme all'asse del moto: in blu quando la componente v_y della velocità è concorde con il verso dell'asse y , in rosso invece la sua traiettoria di ritorno con $v_y < 0$.

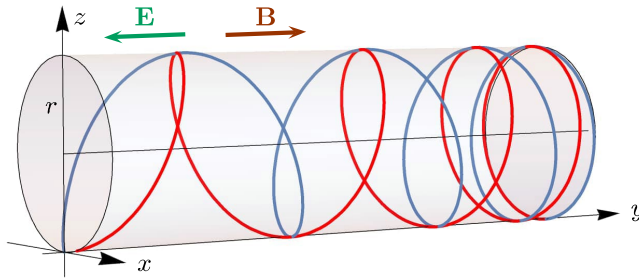


Fig. 3. Rappresentazione prospettica del moto: vista 1.

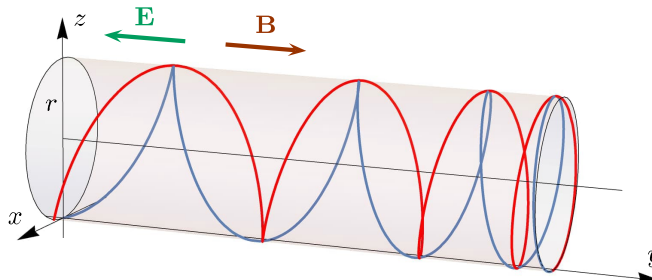


Fig. 4. Rappresentazione prospettica del moto: vista 2.

Problema 3.7 A

Un filo rettilineo di lunghezza finita AB è percorso dalla corrente i . a) Determinare il campo magnetico in un punto P a distanza d dal filo. b) Estendere il risultato nell'ipotesi che il filo sia infinitamente lungo.

Soluzione. a) Con riferimento alla figura 1 e introdotta una terna di riferimento, definiamo innanzitutto i parametri geometrici coinvolti: la distanza del punto P dal filo sia $\overline{PQ} = d$, mentre

$$d\mathbf{l} = dl\mathbf{j} \quad (1)$$

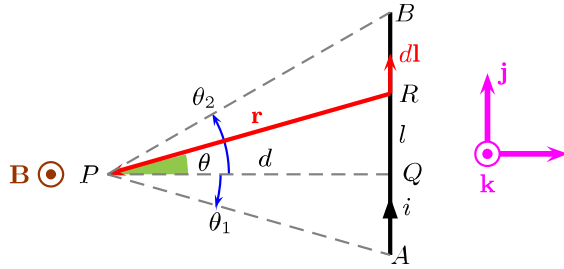


Fig. 1. Parametri geometrici e terna di riferimento: caso 1.

è il vettore che individua l'elemento differenziale di lunghezza posizionato nel punto R e a distanza $\overline{QR} = l$ da Q . Il vettore che collega R con il punto P è invece

$$\overline{RP} = \mathbf{r} = -(r \cos \theta)\mathbf{i} - (r \sin \theta)\mathbf{j} \quad (2)$$

con $\theta = \angle QPR$. Data la lunghezza finita del filo percorso dalla corrente tale angolo deve soddisfare le condizioni

$$\angle QPA \leq \theta \leq \angle QPB \quad \implies \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad (3)$$

dove $\theta_1 < 0$ e $\theta_2 > 0$ in quanto rispettivamente discordi e concordi con il verso della corrente.

Il contributo differenziale al campo magnetico nel punto P è espresso dalla legge di Biot-Savart in forma differenziale

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i(d\mathbf{l} \times \mathbf{r})}{r^3}, \quad (4)$$

ma dalle (1) e (2) il prodotto vettoriale vale

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} \times \mathbf{r} &= (dl)\mathbf{j} \times [-(r \cos \theta)\mathbf{i} - (r \sin \theta)\mathbf{j}] \\ &= -r \cos \theta dl(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) = (r \cos \theta dl)\mathbf{k} \end{aligned}$$

in quanto $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$. Questo risultato mostra come in P si sommino campi infinitesimi

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left(\frac{r \cos \theta dl}{r^3} \right) \mathbf{k} = \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{\cos \theta dl}{r^2} \right) \mathbf{k}, \quad (5)$$

tutti concordi a \mathbf{k} (fig. 1) e di conseguenza, possiamo limitare il calcolo seguente alla sola componente scalare del campo magnetico in P . Definiti come estremi di integrazione gli angoli orientati θ_1 e θ_2 (fig. 1), il campo finito B è dato dall'integrale

$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r^2} \right) dl = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) dl. \quad (6)$$

Per risolverlo esprimiamo il differenziale dl e la grandezza variabile r in termini dell'angolo θ . Poiché la lunghezza l è espressa da

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{QP}} = \frac{l}{d} = \operatorname{tg} \theta, \quad \implies \quad l = d \operatorname{tg} \theta, \quad (7)$$

il calcolo del differenziale dl fornisce l'espressione

$$dl = d \cdot \frac{d(\operatorname{tg} \theta)}{d\theta} d\theta = \frac{d}{\cos^2 \theta} \cdot d\theta$$

in quanto $1/\cos^2 \theta$ è la derivata di $\operatorname{tg} \theta$, mentre la distanza r risulta

$$\frac{d}{r} = \cos \theta \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{d}{\cos \theta}. \quad (8)$$

Inseriamo nella (6) i due risultati (7) e (8),

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos \theta}{(d^2/\cos^2 \theta)} \cdot \frac{d}{\cos^2 \theta} d\theta$$

e dopo una semplificazione dell'integrando otteniamo

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos \theta}{d} d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta.$$

L'ultimo integrale è elementare per cui giungiamo al risultato

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} [\operatorname{sen} \theta]_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} (\operatorname{sen} \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1)$$

che possiamo estendere vettorialmente in

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} (\operatorname{sen} \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1) \mathbf{k}. \quad (9)$$

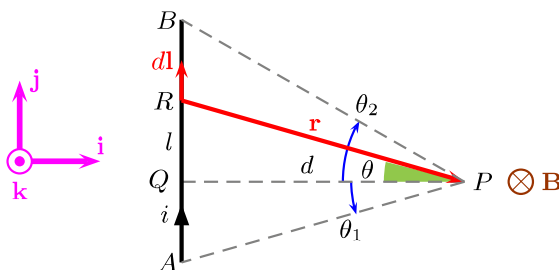


Fig. 2. Parametri geometrici e terna di riferimento: caso 2.

Nel caso di figura 2 e simmetrico al precedente, procediamo allo stesso modo ma questa volta il prodotto vettoriale differenziale assume un valore opposto

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} \times \mathbf{r} &= (dl)\mathbf{j} \times (r \cos \theta \mathbf{i} - r \operatorname{sen} \theta \mathbf{j}) \\ &= r \cos \theta dl(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) = -(r \cos \theta dl)\mathbf{k} \end{aligned}$$

per cui il risultato finito è

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi d} (\operatorname{sen} \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1) \mathbf{k}. \quad (10)$$

b) Nell'ipotesi di un filo infinitamente lungo gli estremi di integrazione diventano

$$\theta_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \theta_2 \rightarrow +\frac{\pi}{2}$$

per cui

$$\lim_{\theta_1 \rightarrow -\pi/2} (\text{sen } \theta_1) = -1, \quad \lim_{\theta_2 \rightarrow +\pi/2} (\text{sen } \theta_2) = 1$$

c la (9) fornisce

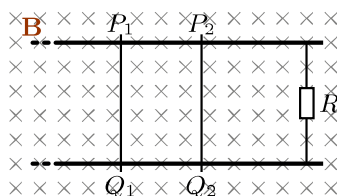
$$\mathbf{B}_\infty = \frac{\mu_0 i}{4\pi d} [1 - (-1)] \mathbf{k} = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi d} \right) \mathbf{k} \quad (11)$$

che rappresenta la legge di Biot-Savart per un filo di lunghezza infinita.

Problema 4.8

Due barrette P_1Q_1 e P_2Q_2 (figura) aventi entrambe una resistenza di $r = 2\ \Omega$ possono scivolare senza attrito su due guide conduttrici orizzontali, parallele, distanti $l = 4\ \text{cm}$, di resistenza trascurabile e connesse tra loro con un resistore avente una resistenza di $R = 19\ \Omega$. L'insieme è immerso in un campo magnetico uniforme di $B = 1\ \text{T}$ verticale. Determinare le correnti che circolano nei conduttori nelle seguenti ipotesi: a) entrambe le barrette si muovono verso destra alla velocità di $v = 5\ \text{cm/s}$; b) P_1Q_1 si muove verso sinistra con velocità di $v = 5\ \text{cm/s}$ e P_2Q_2 verso destra con la medesima velocità.

Disconnesso il resistore, determinare c) la corrente che circola se le barrette si muovono come nel caso a) oppure, d) come nel caso b).



Soluzione. Ciascuna barretta conduttrice nel suo moto entro il campo magnetico genera una f.e.m. dovuta all'addensamento ai suoi estremi di cariche di segno opposto. Queste sono soggette, in una fase transitoria, alla forza di Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ cui si oppone, in condizioni stazionarie, la forza dovuta al campo elettrico interno generato da questo riassetto delle cariche.

Come discusso nel problema 4.2 e in base alla legge di Faraday-Neumann, il modulo di tale f.c.m. dipende solo dalla componente perpendicolare alla barretta per cui, nel caso in esame, vale

$$V = vBl \quad (1)$$

con la simbologia introdotta nel testo. Per individuare il suo verso, va considerato il segno della variazione del flusso $\Phi(\mathbf{B})$ concatenato al circuito (in aumento o in diminuzione) e se il circuito è chiuso su conduttori, dal verso della conseguente corrente indotta. Nel caso di circuito aperto conviene analizzare l'azione della forza di Lorentz sulle cariche.

In quanto segue, tralasciando la formalizzazione collegata al calcolo del flusso e della sua variazione (più volte applicata nei problemi precedenti), utilizzeremo ambedue le osservazioni: definiamo comunque la terna destrorsa di figura 1 così da rappresentare correttamente i vettori coinvolti.

a) Poiché entrambe le barrette si muovono con la medesima velocità nella direzione scelta come positiva (fig. 1) i flussi $\Phi(\mathbf{B})$ attraverso le superfici P_1abQ_1 e P_2abQ_2 diminuiscono per cui la corrente indotta da ciascuna barretta deve avere il verso orario in quanto il campo generato da tali correnti deve sommarsi a quello preesistente.

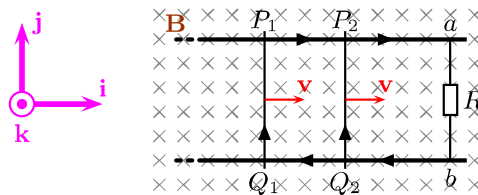


Fig. 1. Caso a): entrambe le barrette in moto verso destra.

Per tale motivo gli estremi P_1 e P_2 sono rispettivamente ad un potenziale più elevato degli estremi Q_1 e Q_2 . In alternativa, se consideriamo la forza di Lorentz agente sulle cariche positive in ciascuna barretta in moto con velocità $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$

$$\mathbf{F}_{1,2} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q(v\mathbf{i}) \times (-B\mathbf{k}) = -qvB(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) = (qvB)\mathbf{j} \quad (2)$$

($\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$), segue che questa forza spinge le cariche ($q > 0$) in direzione degli estremi P_1 e P_2 dove queste si addensano.

La coppia di barrette è quindi equivalente al circuito di fig. 2 per il quale possiamo impostare, in base alle leggi di Ohm e ai principi di Kirchhoff applicati alle due maglie di figura 2, il sistema di equazioni

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = i \\ -ri_1 + V - V + ri_2 = 0 \\ -ri_2 + V - Ri = 0. \end{cases}$$

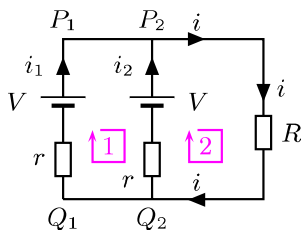


Fig. 2. Caso a): circuito equivalente.

Da questo discende

$$\begin{cases} 2i_1 = i \\ i_1 = i_2 \\ -ri_1 + V - R(2i_1) = 0 \end{cases}$$

per cui, dalla terza equazione otteniamo $V = i_1(r + 2R)$ e quindi, ripresa la (1)

$$i_1 = \frac{V}{r + 2R} = \frac{vBl}{r + 2R} = 5 \times 10^{-5} \text{ A} = i_2$$

così come

$$i = \frac{2V}{r + 2R} = \frac{2vBl}{r + 2R} = 10^{-4} \text{ A}.$$

b) In questo caso la barretta P_1Q_1 si muove nella direzione negativa (fig. 3a) per cui per le considerazioni già esposte si inverte, nel confronto con (2), la forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q(-v\mathbf{i}) \times (-B\mathbf{k}) = -(qvB)\mathbf{j} \quad (3)$$

e di conseguenza la sua polarità. In tale situazione l'apparato diviene equivalente al circuito di fig. 3b cui corrisponde il sistema (si è invertito il percorso nella maglia 1)

$$\begin{cases} i_2 = i_1 + i \\ -ri_2 + V + V - ri_1 = 0 \\ -ri_2 + V - Ri = 0. \end{cases}$$

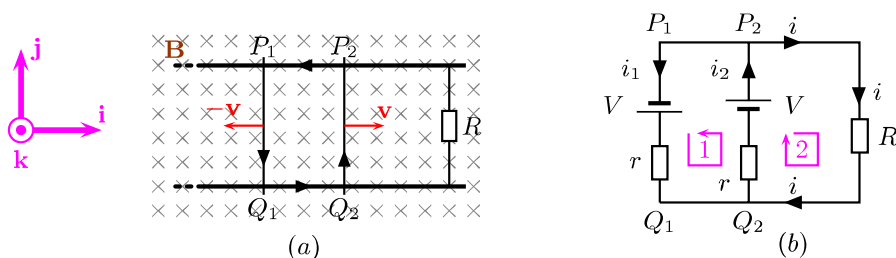


Fig. 3. Caso b): moto in versi opposti e circuito equivalente.

Eliminando i_2 dal sistema otteniamo

$$\begin{cases} -ri_1 - ri + 2V - ri_1 = 0 \\ -ri_1 - ri + V - Ri = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -2ri_1 + 2V = ri \\ ri_1 = V - (r + R)i \end{cases}$$

e quindi pure i_1 , giungiamo all'equazione

$$ri = -2V + 2(r + R)i + 2V \implies ri = 2(r + R)i$$

dalla quale $i(r + 2R) = 0$ e quindi

$$i = 0 \implies i_1 = i_2 = \frac{V}{r} = \frac{vBl}{r} = 10^{-3} \text{ A.}$$

c) Disconnesso il resistore R , nel caso che le barrette procedano con velocità concordi, il circuito è equivalente a quello visualizzato in figura 4c nel quale la corrente dev'essere nulla dato che entrambi i generatori sono in parallelo. Difatti, supponendo una corrente i con il verso indicato in fig. 4c dal secondo principio di Kirchhoff applicato all'unica maglia otteniamo

$$-ri + V - V - ri = 0 \implies i = 0.$$

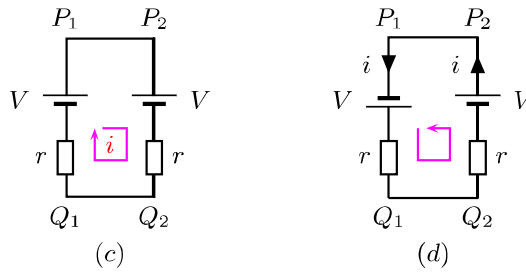


Fig. 4. Circuiti equivalenti c) e d).

d) Nel caso di fig. 4d dove, per il moto con velocità $-\mathbf{v}$ si inverte la d.d.p. della barretta P_1Q_1 (v. (3)), il principio di Kirchhoff fornisce la relazione

$$V - ri - ri + V = 0$$

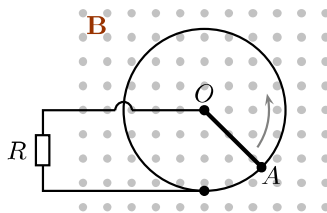
e quindi la corrente

$$i = \frac{V}{r} = \frac{vBl}{r} = 10^{-3} \text{ A}$$

che è la stessa del caso b).

Problema 4.13 A

Una barretta metallica $\overline{OA} = l$ incernierata nel suo estremo O può ruotare attorno ad esso e mantiene l'estremo A , tramite un contatto strisciante, a contatto con una spira circolare pure conduttrice ma, come la barretta, di resistenza trascurabile. L'estremo O è comunque collegato ad un punto fisso della spira circolare tramite un resistore di resistenza R . La barretta viene mantenuta in moto circolare uniforme con velocità angolare ω entro un campo magnetico B perpendicolare al piano della spira. Determinare: a) la corrente che fluisce attraverso la resistenza R , b) la forza che si oppone al moto, c) il momento applicato da una forza esterna per mantenere la barretta in rotazione con la velocità ω .



Soluzione. Definita la terna di riferimento (fig. 1) e al solo scopo di comprendere la polarità della f.e.m. indotta dal moto della barretta, analizziamo le caratteristiche della forza di Lorentz agente sulle singole cariche presenti nel conduttore. Su una particella di carica $q > 0$ della barretta e nell'istante in cui la direzione di questa coincide con quella del versore \mathbf{i} (fig. 1) questa forza è data dalla

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q(v\mathbf{j}) \times (B\mathbf{k}) = (qvB)\mathbf{i}$$

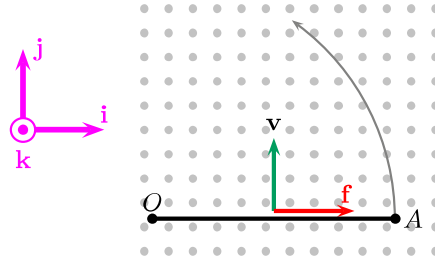


Fig. 1. Forza di Lorentz e polarità degli estremi.

per cui, essendo $qvB > 0$ le cariche si addensano nell'estremo A . Questa osservazione vale pure per qualsiasi altra posizione della barretta per cui l'estremo A assumerà una polarità positiva e quindi $V_A > V_O$.

Per determinare la f.e.m. ci riferiamo alla figura 2 dove, nell'intervallo di tempo infinitesimo dt la barretta ruota di un angolo $d\alpha$. In tal modo essa spazza un settore circolare di area pari a

$$dS = \frac{1}{2} \cdot l (l d\alpha) = \frac{l^2 d\alpha}{2} \quad (1)$$

essendo $l d\alpha$ la lunghezza dell'arco percorso dall'estremo A .

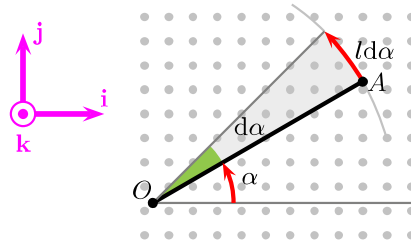


Fig. 2. Area spazzata nel tempo dt .

Il vettore di modulo pari a dS è quindi $d\mathbf{S} = dS \mathbf{k}$ e il corrispondente differenziale del flusso risulta

$$d\Phi(\mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = (B\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{l^2 d\alpha}{2} \mathbf{k} \right) = \frac{Bl^2 d\alpha}{2} \quad (2)$$

in quanto $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$. Dividendo entrambi i membri per $-dt$ otteniamo la legge di Faraday-Neumann e quindi la tensione indotta V

$$-\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{Bl^2}{2} \cdot \frac{d\alpha}{dt} \implies V = -\frac{Bl^2}{2} \cdot \frac{d\alpha}{dt}.$$

D'altra parte il rapporto $d\alpha/dt$ rappresenta la velocità angolare ω per cui la tensione indotta in termini di grandezze positive assume il valore

$$V = \frac{Bl^2 \omega}{2}. \quad (3)$$

Nota. Al medesimo risultato si può giungere evitando l'uso dei differenziali e osservando che nel tempo t la barretta percorre un angolo $\alpha = \omega t$ per cui essa spazza un settore circolare di area $(1/2)\alpha l^2 = (1/2)l^2\omega t$. Ne segue la dipendenza del flusso da t

$$\Phi(\mathbf{B}) = \frac{l^2\omega t}{2} \cdot B = \frac{Bl^2\omega t}{2}$$

per cui, eseguendone la derivata, la tensione indotta è

$$V = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{Bl^2\omega}{2} \cdot \frac{d(t)}{dt} = -\frac{Bl^2\omega}{2}.$$

a) Il sistema si può ora identificare con il circuito di figura 3 e quindi la corrente che lo percorre è, per la legge di Ohm,

$$V = Ri \implies i = \frac{V}{R} = \frac{Bl^2\omega}{2R}. \quad (4)$$

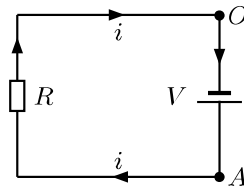


Fig. 3. Circuito equivalente.

b) Per la presenza della corrente i con il verso indicato in figura 4 la barretta è soggetta alla forza

$$\mathbf{F} = i\overrightarrow{OA} \times \mathbf{B}$$

per cui, se esprimiamo \overrightarrow{OA} in termini dell'angolo $\alpha = \omega t$ come

$$\overrightarrow{OA} = (l \cos \alpha)\mathbf{i} + (l \sin \alpha)\mathbf{j} \quad (5)$$

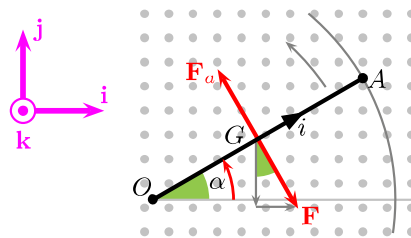


Fig. 4. Forze agenti sulla barretta.

la forza diviene

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= i[(l \cos \alpha)\mathbf{i} + (l \sin \alpha)\mathbf{j}] \times (B\mathbf{k}) \\ &= iBl \cos \alpha(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + iBl \sin \alpha(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\ &= iBl(\sin \alpha \mathbf{i} - \cos \alpha \mathbf{j}) \end{aligned} \quad (6)$$

il cui modulo, ripresa la (4), è

$$F = iBl = \left(\frac{Bl^2\omega}{2R} \right) Bl = \frac{B^2l^3\omega}{2R} \quad (7)$$

indipendente dall'angolo α mentre il segno delle componenti (6) mostra come questa sia disposta e si opponga al moto (fig. 4).

c) Evidentemente la forza \mathbf{F}_a che va applicata dovrà avere lo stesso modulo $F_a = iBl$ e verso opposto (fig. 4) e quindi fornire un momento torcente \mathbf{M}_a opposto a quello di \mathbf{F} e pari in modulo. D'altra parte il momento torcente dipende pure dal punto di applicazione di \mathbf{F} . Se comunque consideriamo la forza \mathbf{F} uniformemente distribuita lungo la barretta possiamo ritenere che sia applicata nel baricentro G . In tale ipotesi, osservata la perpendicolarità tra \overrightarrow{OG} e \mathbf{F}_a , il modulo del momento applicato è

$$\begin{aligned} |\mathbf{M}_a| &= |\overrightarrow{OG} \times \mathbf{F}_a| = \overline{OG} \cdot F_a \cdot \sin 90^\circ \\ &= \frac{l}{2}(iBl) = \frac{iBl^2}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

e quindi, inserita la corrente (4), giungiamo al risultato

$$|\mathbf{M}_a| = \frac{\omega B^2 l^4}{4R}.$$

Appendice. Intendiamo qui giustificare l'ipotesi fatta circa il punto di applicazione della forza \mathbf{F} . A partire quindi dalla definizione di momento torcente

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

e con le note regole di derivazione valide pure per il prodotto vettoriale, il suo differenziale è

$$d\mathbf{M} = d\mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{r} \times d\mathbf{F}. \quad (9)$$

Nel nostro caso possiamo identificare il differenziale $d\mathbf{r}$ con un trattino infinitesimo di $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$ ossia, in base a (5) porre (nella direzione della barretta α è una costante)

$$d\mathbf{r} = dl(\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}) \quad (10)$$

mentre, a partire dalla (6) dove iBl è una costante, il calcolo di $d\mathbf{F}$ è

$$d\mathbf{F} = iBl[(d\alpha \cos \alpha)\mathbf{i} + (d\alpha \sin \alpha)\mathbf{j}] = iBl d\alpha (\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}). \quad (11)$$

Ne segue per i due prodotti vettoriali presenti in (9)

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ dl \cos \alpha & dl \sin \alpha & 0 \\ iBl \sin \alpha & -iBl \cos \alpha & 0 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{k}(-iBl dl \cos^2 \alpha - iBl dl \sin^2 \alpha) = -(iBl dl)\mathbf{k} \\ \\ \mathbf{r} \times d\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l \cos \alpha & l \sin \alpha & 0 \\ iBl d\alpha \cos \alpha & iBl d\alpha \sin \alpha & 0 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{k}(iBl^2 d\alpha \sin \alpha \cos \alpha - iBl^2 d\alpha \sin \alpha \cos \alpha) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

per cui (9) si semplifica in

$$d\mathbf{M} = -(iBl \, dl)\mathbf{k}, \quad (12)$$

espressione che mostra come i contributi al momento torcente siano tutti paralleli e opposti al versore \mathbf{k} . Non rimane che integrare entro i limiti $[0, l]$ per ottenere il momento totale

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_0^l d\mathbf{M} = -\mathbf{k} \int_0^l (iBl) \, dl = -\mathbf{k}(iB) \int_0^l l \, dl \\ &= -\mathbf{k}(iB) \left[\frac{l^2}{2} \right]_0^l = -\left(\frac{iBl^2}{2} \right) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Ricordando che la forza è $F = iBl$ e posto $l/2 = \overline{OG}$ il momento complessivo si può riscrivere come

$$\mathbf{M} = -\left(\frac{iBl^2}{2} \right) \mathbf{k} = -\frac{l}{2} \cdot (iBl)\mathbf{k} = -(\overline{OG} \cdot F)\mathbf{k}$$

in accordo con l'aspettativa di un momento torcente opposto alla rotazione e con l'ipotesi di applicare \mathbf{F} nel baricentro della barretta.

Appendice

In questa appendice riportiamo l'elenco delle principali nozioni necessarie o utili per comprendere adeguatamente quanto esposto nei vari capitoli di questa raccolta.

Capitolo 1: Correnti in conduttori

- Principi di Kirchhoff
- Leggi di Ohm
- Serie e parallelo di resistori
- Generatori di tensione e f.e.m.
- Potenza dissipata ed effetto Joule
- Carica e scarica di condensatori

Capitolo 2: Moto di cariche in campi e.m.

- Forza di Lorentz
- Campi elettrici e magnetici incrociati
- Spettrometro di massa
- Ciclotrone

Capitolo 3: Campo magnetico e correnti

- Interazione corrente-campo magnetico
- Spire e bobine
- Legge di Biot-Savart
- Circuitazione in un campo vettoriale
- Legge di Ampère

Capitolo 4: Induzione elettromagnetica

- Legge di Faraday-Neumann
- Legge di Lenz
- Equazioni differenziali a variabili separabili
- Integrali elementari
- Induttori e legge dell'induttanza
- Circuiti RL
- Correnti di apertura e chiusura
- Energia in un induttore
- Mutua induttanza